www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 5 heures

L'attention des candidats est attirée sur la nécessité de rédiger des démonstrations à la fois précises et concises : aucune démonstration vague ou incomplète, aucun résultat énoncé sans justification ne seront pris en considération. La présentation matérielle (lisibilité de la copie, orthographe) sera prise en compte dans la note globale.

Dans tout le problème, on désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ indéfiniment dérivables ($f^{(j)}$ désigne la j^{ième} dérivée de f, $f^{(0)} = f$ et on notera aussi $f^{(1)} = f'$) et vérifiant les deux propriétés (A) et (B) suivantes :

(A) : il existe un nombre réel r vérifiant $\lim_{t \to +\infty} [e^{-rt} f^{(j)}(t)] = 0, \forall j \in \mathbf{N}$.

(B) : l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est absolument convergente.

Si $f \in \mathcal{H}$, on note $\alpha(f)$ la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels r satisfaisant la condition (A).

On précise que les questions 1, 2 et 3 de la partie III et les questions 1, 2, 3 et 4 de la partie IV ne dépendent que de la partie I.

I

1° a) Soit $f \in \mathcal{H}$. Montrer que pour tout nombre réel y tel que $y > \alpha(f)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$ est absolument convergente.

b) Déterminer $\alpha(f)$ pour les fonctions $t \to \sin t$, $t \to \ln t$, $t \to e^t$ et $t \to e^{-t^2}$. Dans chaque cas où $\alpha(f)$ est un nombre réel, discuter l'existence de $\lim_{t \to +\infty} [e^{-\alpha(f)t} f(t)]$ et calculer sa valeur, le cas échéant.

Dans la suite du problème, on associe à toute fonction f de $\mathcal{H}$ la fonction $F = \Lambda(f)$ définie sur $]\alpha(f), +\infty[$ par $F(y) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$. On admettra que l'application Λ est injective.

2° a) Soit $f \in \mathcal{H}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction définie par $F_n(y) = \int_{1/n}^{n} f(t)e^{-yt}dt$ est de classe C^1 et exprimer sa dérivée au moyen d'une intégrale. Montrer que la suite $(F'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $\Lambda(g)$ sur $[r, +\infty[$ pour tout $r > \alpha(f)$, g étant une fonction de $\mathcal{H}$ que l'on précisera.

b) Etablir que pour tout $f \in \mathcal{H}$ la fonction $\Lambda(f)$ est de classe C^∞ sur $]\alpha(f), +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, sa dérivée $n^{ième}$ est l'image par Λ d'une fonction de $\mathcal{H}$ que l'on précisera.

Tournez la page S.V.P.

3° a) Déterminer $\Lambda(f)$ lorsque $f(t) = 1$, $\forall\, t \in\,]0, +\infty[$.

b) Déterminer $\Lambda(f)$ lorsque $f(t) = t^n/n!$ où $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Soit (a_n) une suite de nombres réels telle qu'il existe des constantes réelles positives M et k pour lesquelles $|a_n| \leq Mk^n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n/n!$.

Montrer que $f \in \mathcal{H}$. Préciser un majorant de $\alpha(f)$ et exprimer $\Lambda(f)$ comme somme d'une série de fonctions.

d) Soit $b \in \mathbf{R}$. Trouver f telle que $\alpha(f) = b$ et $\Lambda(f)(y) = \dfrac{1}{y-b}$.

II

1° a) Soit $f \in \mathcal{H}$. On suppose l'existence d'un nombre réel strictement positif a tel que $f(t) \geq 0$ et $f'(t) \leq 0$, $\forall t \in\,]0, a]$.
Montrer que l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $]0,a]$ décroissante de limite nulle telle que $x_n f(x_n) > 1$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ est incompatible avec la convergence de l'intégrale $\int_0^a f(t)dt$.

b) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{H}$ tel que f' soit de signe constant dans un voisinage de 0, $\lim_{x \to 0} [xf(x)] = 0$

c) Sous les hypothèses de b), prouver que la fonction h définie par $h(t) = -tf'(t)$ appartient à $\mathcal{H}$, montrer que $\alpha(h) \leq \alpha(f)$ et vérifier la relation

$$\Lambda(h)(y) = \frac{d}{dy}(yF(y)) = F(y) + yF'(y)\,,\ \forall y \in\,]\alpha(f), +\infty[.$$

2° a) Démontrer la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ et $\int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$, $\forall t > 0$.

b) On pose $S(t) = \pi/2 - \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ et $C(t) = -\int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$. Montrer que $C(t) \sim \ln t$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que les fonctions $S(t)$ et $C(t)$ appartiennent à $\mathcal{H}$; montrer que $\alpha(S)$ et $\alpha(C)$ sont négatifs ou nuls.

3° a) Calculer l'image par Λ des fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$.

b) Vérifier que $y\Lambda(S)(y) = \int_0^{+\infty} S\left(\frac{u}{y}\right) e^{-u} du$. En déduire que $y\Lambda(S)(y)$ tend vers $\pi/2$ quand y tend vers 0 par valeurs positives.

c) Vérifier que les fonctions S et C satisfont les hypothèses du II 1° b). En déduire que $\alpha(S) = \alpha(C) = 0$ et, en utilisant le résultat de a), calculer $\Lambda(S)(y)$.

d) Déterminer le développement en série entière de la fonction S.

e) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Tournez la page S.V.P.

III

1° Pour $s>0$, on pose $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$.

a) Vérifier la convergence de cette intégrale pour tout nombre réel $s>0$.
Prouver l'égalité $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ pour tout nombre réel $s>0$ et calculer $\Gamma(s)$ lorsque $s\in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que si $s \in]0,1[$,

$$\Gamma(s)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n(1-x/n)^n x^{s-1}dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)...(s+n)}$$

(On pourra introduire la fonction $\psi_n=e^{-x}-(1-x/n)^n$ et chercher un majorant simple de ψ_n sur $[0,n]$). En déduire les mêmes égalités pour tout $s>0$.

2° a) On note γ la constante d'Euler : $\gamma=\lim_{n\to\infty}(1+1/2+...+1/n-ln\ (n))$.
Montrer que la série de terme général $s/m-ln(1+s/m)$, $m\in \mathbb{N}^*$, est convergente et prouver l'égalité $ln\ [\Gamma(s)\ ]=-ln\ (s)-\gamma s+\sum_{m=1}^{+\infty}[s/m-ln(1+s/m)]$.

b) En déduire que $\Gamma(s)$ est dérivable et exprimer $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ comme somme d'une série de fonctions.

3° a) Montrer que l'image par Λ de la fonction $t\to t^{s-1}$ est $y\to\frac{\Gamma(s)}{y^s}$

b) Montrer que l'image par Λ de la fonction $t\to t^{s-1}ln(t)$ est définie sur $]0,+\infty[$ par $y\to\frac{\Gamma'(s)}{y^s}-\Gamma(s)\frac{ln\ y}{y^s}$ (On pourra s'inspirer du raisonnement du I 3°, avec la variable s au lieu de y).

c) En déduire que l'image par Λ de la fonction $t\to ln(t)$ est $y\to-\frac{ln(y)+\gamma}{y}$

4° a) Soit $f\in\mathcal{H}$ telle que $\lim_{t\to+\infty}[f(t)]=0$ et $\alpha(f)\le 0$. Montrer que $\lim_{y\to0} y\ \Lambda(f)(y)=0$.

b) En déduire l'image par Λ de la fonction C définie à la question II 2° (On pourra considérer la fonction $K(t)=C(t)-ln(t)$ et utiliser II 1° c)).

c) Déterminer le développement en série entière de la fonction $t\mapsto C(t)-ln(t)$.

T.S.V.P.

IV

Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des fonctions numériques réelles, définies sur $]0, +\infty[$, de classe C^∞, bornées ainsi que toutes leurs dérivées sur $]0, +\infty[$.

1° Montrer que $\mathfrak{B}$ est contenu dans $\mathcal{H}$ et que pour tout $f \in \mathfrak{B}$, $\alpha(f) \leq 0$.

2° Soit $f \in \mathfrak{B}$ telle que $f(t)$ soit négligeable devant t^n quand t tend vers 0 ($n \in \mathbb{N}$ est fixé). Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des constantes réelles positives M et η telles que, si $F = \Lambda(f)$,

$$\forall\, y \in]0,+\infty[\ ,\ |F(y)| \leq \frac{n!}{y^{n+1}}\varepsilon + \frac{e^{-\eta y}}{y} M$$

En déduire que $F(y)$ est négligeable devant $1/y^{n+1}$ quand y tend vers $+\infty$.

3° Soit $f \in \mathfrak{B}$ admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + t^n g(t)$, $g(t) \to 0$ quand $t \to 0$.

Montrer que $F = \Lambda(f)$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de $+\infty$:

$F(y) = b_0/y + b_1/y^2 + \ldots + b_n/y^{n+1} + G(y)/y^{n+1} \to 0$ quand $y \to +\infty$.

Calculer $b_0, b_1, \ldots, b_n$ en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

4° a) Montrer que si $f \in \mathcal{H}$, la fonction $u(t) = (e^t - 1)f(t)$ appartient à $\mathcal{H}$. Montrer que $\alpha(u) = \alpha(f) + 1$ et trouver une relation entre $\Lambda(f)$ et $\Lambda(u)$.

b) Soit $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$. Montrer que $f \in \mathfrak{B}$ et que $F = \Lambda(f)$ vérifie $F(y-1) - F(y) = 1/y^2$.

5° Soit $\Phi(s) = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ la série de fonctions définie en III 2° b).

a) Montrer que $\Phi'(s) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+s)^2}$ et en déduire que $\Phi'(s+1) - \Phi'(s) = -1/s^2$.

b) Prouver que $F(y) \to 0$ quand $y \to +\infty$ et que $\Phi'(s) \to 0$ quand $s \to +\infty$. En déduire que $F(s) = \Phi'(s+1)$ pour tout $s > 0$ (F ayant été défini en 4° b)).

6° Soit la fonction $g(t) = \dfrac{1}{t(e^t - 1)} - \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{2t}$.

a) Montrer que g appartient à $\mathfrak{B}$ et calculer le développement limité de g à l'ordre 3 au voisinage de 0.

b) Calculer l'image par Λ de la fonction $t \mapsto t^2 g(t)$ et en déduire celle de g (on utilisera I 3° b)).

c) En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $s \to \ln\left[\dfrac{e^s \Gamma(s)}{s^{s-1/2}}\right]$, puis un développement asymptotique de $\Gamma(s)$

(On admettra la formule de Stirling : $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{e^s \Gamma(s)}{s^{s-1/2}} = \sqrt{2\pi}$).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail